TD d'Analyse Numérique 4

Méthodes à un pas pour les EDO

avril 2011

Exercice 1 : Méthode d'Euler explicite

1. Lemme de Gronwall : Soit $f \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$, telle que pour tout $t \in [0,T]$

$$f(t) \leqslant a + b\int_0^t f(\xi)d\xi, \quad (a \in \mathbb{R},\, b \geqslant 0)$$

Montrer que

$$f(t) \leqslant ae^{bt}.$$

2. Soit $F\colon [0,T]\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, continue , α-lipschitzienne par rapport à la seconde variable, et bornée.
On définit $x_n\colon [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ comme l'unique fonction telle que pour tout $t \in]kT/n,(k+1)T/n[$,

$$x_n(t) = x_n\left(k\frac{T}{n}\right) + \left(t - \frac{kT}{n}\right)F\left(\frac{kT}{n}, x_n\left(\frac{kT}{n}\right)\right).$$

$x(0) = x_0$ donné.

   (a) Montrer qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $\sup\limits_{n,t}\|x_n(t)\| \leqslant M$

   (b) Montrer que x_n est de Cauchy pour la norme uniforme.

   (c) Justifier que la limite obtenue est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = F(t,x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Quelques considérations plus générales sur les méthodes à un pas

On considère une E.D.O. (Equation Différentielle Ordinaire)

$$y'(t) = f(t,y(t)), \tag{1}$$

avec $y\colon [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f\colon [0,T]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ d'une régularité suffisante.
On note $(0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T)$ une subdivision régulière de $[0,T]$, et on pose h le pas.
On considère des méthodes numériques à un pas, c'est-à-dire s'écrivant sous la forme :

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n,y_n,h), \quad 0 \leqslant n < N, \tag{2}$$

y_n est une valeur approchée de $y(t_n)$. y_0 est donné.
$\Phi\colon [0,T]\times\mathbb{R}\times[0,\delta] \longrightarrow \mathbb{R}$ est supposé continue.
On note $z\colon [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution exacte de (1).
Le réel e_n défini par

$$e_n = z(t_{n+1}) - z(t_n) - h\Phi(t_n, z(t_n), h), \quad 0 \leqslant n < N \tag{3}$$

s'appelle erreur de consistance pour z.

On introduit alors la notion de consistance, et d'ordre :

Définition 1 (Consistance) *La méthode (2) est consistante avec (1) si, pour toute solution z de (1), on a*

$$\sum_{n=0}^{N-1} |e_n| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } h + |y_0 - z(0)| \longrightarrow 0.$$

Définition 2 (Ordre) *Soit $p \geqslant 0$. On dit que la méthode (2) est d'ordre p si, pour toute solution exacte z de (1), il existe C tel que*

$$|e_n| \geqslant Ch^{p+1}, \quad 0 \leqslant n < N.$$

Exercice 2 : CNS de consistance

Soit z une solution de (1), montrer que la méthode (2) est consistante avec (1) si, et seulement si,

$$\Phi(t, y, 0) = f(t, y), \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant T,\ y \in \mathbb{R}.$$

Définition 3 (Stabilité) *On dit que la méthode (2) est stable s'il existe une constante S telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, et toutes suites $(y_n)_{(0\leqslant n\leqslant N)}$ et $(\widetilde{y}_n)_{(0\leqslant n\leqslant N)}$ vérifiant (2) et (2) perturbée :*

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h), \quad \widetilde{y}_{n+1} = \widetilde{y}_n + h\Phi(t_n, \widetilde{y}_n, h) + \varepsilon_n,\ 0 \leqslant n < N,$$

on ait

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N} |y_n - \widetilde{y}_n| \leqslant S\left(|y_0 - \widetilde{y}_0| + \sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n|\right).$$

Exercice 3 : Lemme de Gronwall

On suppose que les suites $(\varepsilon_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ et $(\theta_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ vérifient $\theta_n \geqslant 0$ et $\theta_{n+1} \leqslant (1 + \Lambda h)\theta_n + |\varepsilon_n|$, $0 \leqslant n < N$. Montrer que

$$\theta_n \leqslant \theta_0 e^{\Lambda t_n} + \sum_{i=0}^{n-1} e^{\Lambda(t_n - t_{i+1})} |\varepsilon_i|.$$

En déduire que

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N} \theta_n \leqslant e^{\Lambda T}\left(\theta_0 + \sum_{i=0}^{N-1} |\varepsilon_i|\right)$$

Exercice 4 : Condition suffisante de stabilité

On suppose que Φ est lipschitzienne en son deuxième argument, c'est-à-dire qu'il existe $\Lambda \geqslant 0$ tel que pour $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant h \leqslant \delta$, $y, z \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\Phi(t, y, h) - \Phi(t, z, h)| \leqslant \Lambda |y - z|.$$

Montrer que la méthode (2) est stable. Donner la constante de stabilité.

Exercice 5 : Stabilité et consistance entraîne convergence

On suppose que la méthode (2) est stable et consistante (d'ordre p). Montrer que

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N} |z(t_n) - y_n| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } h + |y_0 - z(0)| \longrightarrow 0.$$