TD d'Analyse Numérique 3

Intégration numérique

mars 2011

Soit (a, b) un intervalle de $\mathbb{R}$, $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue telle que $\int_a^b x^n w(x) dx$ est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$. On veut calculer une valeur approchée de $\int_a^b f(x) w(x) dx$ avec une somme finie du type

$$(IN) : \int_a^b f(x) w(x) dx \approx \sum_{i=0}^k \lambda_i f(x_i)$$

où $\lambda_i, x_i \in \mathbb{R}$. On note l'erreur $E(f) := \int_a^b f(x) w(x) dx - \sum_{i=0}^k \lambda_i f(x_i)$.

Définition : La méthode (IN) est d'ordre p si elle est exacte sur les polynômes de degré $\leq p$ avec p maximal.

Exercice 1 : Majoration de l'erreur dans la méthode des trapèzes [Francinou, Analyse 2]

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty$$

2. On suppose seulement f de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$0 \leq \frac{1}{2} f(0) + f(1) + \dots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_1^n f \leq \frac{1}{8} (f'(n) - f'(0))$$

Exercice 2 : Théorème de Peano [Demailly]

1. On suppose que la méthode (IN) est d'ordre N et que les points a, b, x_i appartiennent à un intervalle borné $[\alpha, \beta]$. Montrer que, pour tout $f \in C^{N+1}([\alpha, \beta])$,

$$E(f) = \frac{1}{N!} \int_\alpha^\beta K_N(t) f^{(N+1)}(t) dt, \text{ où } K_N(t) = E(x \rightarrow (x-t)_+^N).$$

2. On suppose que K_N garde un signe constant sur $[\alpha, \beta]$. Montrer que, pour tout $f \in C^{N+1}([\alpha, \beta])$, il existe $\xi \in [\alpha, \beta]$ tel que

$$E(f) = \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi) E(x \rightarrow x^{N+1}).$$

Exercice 3 : Méthodes de Gauss [Stoer Bulirsch]

1. Montrer qu'une méthode d'intégration numérique de type (IN) a $(k + 1)$ points et d'ordre $(2k + 1)$ est unique.

Indication : supposer l'existence, considérer $P(X) = \prod_{i=0}^k (X - x_i)$ et montrer que P est orthogonal aux polynômes de degré $\leq k$ dans L_w^2 . Caractériser les x_i et les λ_i .

2. Montrer que les valeurs de x_i et λ_i trouvées à la question 1 donnent lieu à une méthode d'intégration numérique d'ordre au moins égal à $2k + 1$

Remarque : on peut montrer que le noyau de Peano (défini dans l'exercice 2) est positif :

$$K_{2k+1}(t) \geq 0,$$

si bien que le résultat obtenu dans la question 2 de ce même exercice s'applique : il existe ξ tel que

$$E(f) = \frac{1}{(2k + 1)!} f^{(2k+1)}(\xi) E(x \mapsto x^{2k+1}).$$

En prenant $f: x \mapsto x^{2k+1}$ et en remarquant que $E(x \mapsto x^{2k+1}) = \|P_{k+1}\|_w^2$, on obtient qu'alors :

$$E(x \mapsto x^{2k+1}) > 0.$$

3. Montrer que, pour $i = 0, \dots, k$, $\lambda_i > 0$.

Exercice 4 : Théorème de Polya [Crouzeix-Mignot]

On considère une famille de formules d'intégration numérique

$$(IN)_k : \int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=0}^k \lambda_{i,k} f(x_{i,k}).$$

On note $E_k(f)$ l'erreur associée. On suppose que les points $x_{i,k}$, a , b , appartiennent tous à un intervalle borné $[\alpha, \beta]$.

1. Vérifier que $E_k \in (C^0([\alpha, \beta]), \|\cdot\|_\infty)'$ et calculer $\|E_k\|$.
2. Montrer qu'il y a équivalence entre

(a) pour tout $f \in C^0([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k(f) = 0$

(b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k(x^n) = 0$ et il existe une constante M telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^k |\lambda_{i,k}| \leq M$.

3. Montrer que les méthodes de Gauss convergent.
4. On considère la famille de formules d'intégration numérique

$$(IN)_k : \int_0^1 f(x)dx \approx f(-1/k) - f(0) + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(i/k).$$

Vérifier que pour tout $f \in C^0([-1, 1])$, $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k(f) = 0$. Donner un exemple de fonction continue par morceaux pour laquelle il n'y a pas convergence.

Exercice 5 : Formule d'Euler Mac Laurin [Demailly]

1. Soit $f \in C^1([0, 1])$. Vérifier que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \int_0^1 (x - 1/2)f'(x)dx$.
2. Montrer que qu'il existe une suite de nombres réels $(b_p)_{p \geq 1}$ et une suite de polynômes $(B_p)_{p \geq 1}$ tels que pour tout $f \in C^p([0, 1])$,

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} + \sum_{m=1}^{p-1} b_m \int_0^1 f^{(m)}(x)dx + \int_0^1 B_p(x)f^{(p)}(x)dx.$$

(Ce sont à un facteur près les nombres et les polynômes de Bernoulli). Montrer que $B_p(x) = (-1)^p B_p(1 - x)$.

3. Soit $f \in C^\infty([a, b])$. On utilise les mêmes notations que dans l'exercice 1. Montrer la formule d'Euler Mac Laurin :

$$\int_a^b f(x)dx - T_k(f) = \sum_{m=1}^{p-1} b_{2m} h^{2m} \int_a^b f^{(2m)}(x)dx + h^{2p} \int_a^b \widetilde{B}_p\left(\frac{x-a}{h}\right) f^{(2p)}(x)dx$$

où $\widetilde{B}_p(x) = B_p(x - [x])$. En déduire que si f est $(b - a)$ -périodique alors il existe une constante C_p indépendante de h telle que $|E_k(f)| \leq C_p h^{2p}$.