TD d'Analyse Numérique 2

Calcul approché des solutions de $f(x) = 0$

mars 2011

Exercice 1 : Méthode de Newton en 1D [Crouzeix, Pommelet]

Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\tilde{x} \in [a, b]$ tel que $f(\tilde{x}) = 0$ et que pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) \neq 0$. Pour $x_0 \in [a, b]$, on définit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

1. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{x}$ et il existe une constante C telle que pour tout $x_0 \in [\tilde{x} - \epsilon, \tilde{x} + \epsilon]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - \tilde{x}| \leqslant C|x_n - \tilde{x}|^2$ (convergence quadratique).
2. L'équation $\arctan x = 0$ a une unique solution $\tilde{x} = 0$. Montrer que la convergence de la méthode de Newton n'est pas globale pour

$$\begin{cases} x_0 \in [-5, 5] \\ x_{n+1} = x_n - (1 + x_n^2) \arctan x_n. \end{cases}$$

3. On suppose que f'' ne change pas de signe sur $[a, b]$, par exemple, pour tout $x \in [a, b]$, $f''(x) > 0$. Montrer que pour tout $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et converge vers $\tilde{x}$.

Indication : montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \geqslant 0$. Remarque : l'exemple de la question b) est un cas ou f'' change de signe et on n'a pas de convergence globale.

Exercice 2 : Newton en dimension N [Chambert-Loir, Fermigier]

1. Soit $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, différentiable sur un ouvert conxeve Ω. On suppose qu'il existe $\gamma > 0$ tel que pour tous x et y dans Ω :

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leqslant \gamma \|x - y\|.$$

Montrer que pour tous x et y dans Ω :

$$\|f(x) - f(y) - f'(y)(x - y)\| \leqslant \frac{\gamma}{2} \|x - y\|^2.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, $B = B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x - x_0\| < r\}$.
On considère la méthode de Newton :

$$x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n).$$

On fait les hypothèses :

(a) $\forall\, x, y \in B, \quad \|f'(x) - f'(y)\| \leqslant \gamma \|x - y\|$

(b) $\forall\, x \in B$, $f'(x)$ est inversible et $\|f'(x)^{-1}\| \leqslant \beta$

(c) $\alpha = \|x_1 - x_0\| < \dfrac{2r}{2 + \beta\gamma r}$

2. Montrer, par récurrence sur $n \geqslant 0$, que $x_n \in B$ et $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \alpha h^{2^n - 1}$, où $h < 1$ à préciser.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers un $\xi \in B$ tel que $f(\xi) = 0$ et que :

$$\forall n \,\|x_n - \xi\| \leqslant \alpha \frac{h^{2^n - 1}}{1 - h^{2^n - 1}}$$

Exercice 3 : Inversion d'une matrice par la méthode de Newton [Héron, Issard-Roch, Picard]

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On souhaite appliquer la méthode de Newton à

$$\begin{array}{rccc} f : & GL_n(\mathbb{C}) & \to & M_n(\mathbb{C}) \\ & M & \to & M^{-1} - A \end{array}$$

($f(M) = 0$ équivaut à $M = A^{-1}$) ce qui conduit à la suite :

$$\begin{cases} A_0 \in GL_n(\mathbb{C}) \\ A_{k+1} = 2A_k - A_k A A_k \end{cases}$$

Remarque : cette suite est bien définie mais pour être une application de la méthode de Newton (cad s'écrire $A_{k+1} = A_k - f'(A_k)^{-1} f(A_k)$), il faut que A_k appartienne a l'ensemble de définition de f, ce qui n'est pas évident a priori.

1. Montrer que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A^{-1} si et seulement si $\rho(I - AA_0) < 1$.
2. Montrer que si $\rho(I - AA_0) < 1$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k \in GL_n(\mathbb{C})$.
3. Soit $A_0 = \frac{A^*}{\|A\| \|A^*\|}$ où $\|.\|$ est une norme matricielle quelconque. Montrer que $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers A^{-1}.

La méthode de Newton a un inconvénient : elle utilise f'. Les méthodes de type interpolation présentées dans les deux exercices suivants évitent ce recours à f'.

Exercice 4 : Méthode de fausse position [Stoer Bulirsch p307]

Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, f est monotone sur $[a, b]$ et $f'' \geqslant 0$ sur $[a, b]$. On définit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{k+1} = \text{ racine du polynôme } P \text{ de degré 1 tel que } P(x_k) = f(x_k) \text{ et } P(b) = f(b). \end{cases}$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(x_k) \leqslant 0$. En déduire que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers un zéro de f.

Remarque : Le théorème de point fixe standard permettrait d'obtenir une convergence locale, l'énoncé précédent est plus fort.

Exercice 5 : Calcul approché des racines d'un polynôme [Stoer Burlisch]

Soit $\lambda_1 < \cdots < \lambda_r \in \mathbb{R}$, $m_1, \cdots, m_r \in \mathbb{N}^*$
On veut calculer les racines du polynôme P défini par :

$$P = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, la méthode de Newton consiste à considérer la suite donnée par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}.$$

On suppose que $x_0 > \lambda_r$

1. Montrer que $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est strictement décroissante et converge vers λ_r.
2. Montrer que
   - Si $m_r = 1$, montrer que pour tout $c > 0$, $|x_n - \lambda_r| = o(c^n)$
   - Si $m_r > 1$, montrer qu'il existe $c \neq 0$, $|x_n - \lambda_r| \underset{n \to +\infty}{\sim} c \left(1 - \dfrac{1}{m_r}\right)^n$
3. Proposer une méthode pour calculer les racines d'un polynôme dont on sait qu'il a toutes ses racines réelles.