TD d'Analyse Numérique 1

Approximation polynômiale et polynômes orthogonaux

mars 2011

1 Polynôme de meilleure approximation au sens d'une norme

Exercice 1 : Existence, unicité ? [Crouzeix Mignot]
Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé tel que $\mathbb{P}_n \subset E$.
1) Montrer que, pour tout $f \in E$, il existe $p_n \in \mathbb{P}_n$ tel que $\|f - p_n\| = \min\{\|f - p\|; p \in \mathbb{P}_n\}$.
2) Montrer que, pour tout $\alpha \in [0, 2]$, $p(X) := \alpha X$ est pma dans $\mathbb{P}_1$ pour $\|.\|_{L^\infty((-1,1),\mathbb{R})}$ de

$$f(x) := \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0, \\ -1 \text{ si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

3) Montrer que, pour tout $\alpha \in [-1, 1]$, $p(X) := \alpha$ est pma dans $\mathbb{P}_0$ pour $\|.\|_{L^1((-1,1),\mathbb{R})}$ de f.
4) Justifiez l'unicité du pma lorsque E est un espace de Hilbert.

Exercice 2 : Un cas particulier non hilbertien [Héron Issard-Roch Picard]
Le but de cet exercice est de montrer que, pour $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, il y a unicité du pma dans $L^1((a, b), \mathbb{R})$.
Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{P}_n$ un pma de f pour la distance de $L^1((a, b), \mathbb{R})$. Soit $E := \{x \in [a, b]; f(x) = P(x)\}$ et

$$\sigma(x) := \begin{cases} +1 & \text{si} \quad f(x) > P(x), \\ -1 & \text{si} \quad f(x) < P(x), \\ 0 & \text{si} \quad f(x) = P(x). \end{cases}$$

1) Montrer que, pour tout $R \in \mathbb{P}_n$ et pour tout $t > 0$,

$$\int_a^b \frac{|f(x) - P(x) + tR(x)| - |f(x) - P(x)|}{t} dx \geqslant 0.$$

2) Montrer que, pour tout $R \in \mathbb{P}_n$,

$$\int_{[a,b]-E} \sigma(x)R(x)dx + \int_E |R(x)|dx \geqslant 0.$$

3) En déduire que, pour tout $R \in \mathbb{P}_n$,

$$|\int_a^b \sigma(x)R(x)dx| \leqslant \int_E |R(x)|dx.$$

4) Montrer que Card$(E) \geqslant n+1$.
Indication : Raisonner par l'absurde et exhiber $R \in \mathbb{P}_n$ tel que $\int_a^b \sigma R \neq 0$.
5) Supposons qu'il existe $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_n$ tels que

$$\|f - P_1\|_{L^1((a,b),\mathbb{R})} = \|f - P_2\|_{L^1((a,b),\mathbb{R})} = \min\{\|f - Q\|_{L^1((a,b),\mathbb{R})}; Q \in \mathbb{P}_n\}.$$

Établir que, pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - \frac{P_1(x) + P_2(x)}{2}| = \frac{1}{2}|f(x) - P_1(x)| + \frac{1}{2}|f(x) - P_2(x)|.$$

En déduire que $P_1 = P_2$. Conclure.

2 Polynômes orthogonaux

Soit (a, b) un intervalle de $\mathbb{R}$, $w : (a, b) \to \mathbb{R}_+^*$ continue telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n w(x) \in L^1((a, b), \mathbb{R})$. L'espace vectoriel

$$L_w^2 := \{f : (a, b) \to \mathbb{C} \text{ mesurable} ; \int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx < \infty\},$$

muni du produit scalaire $< ., . >$ et de la norme associée $\|.\|_{L_w^2}$ définis par

$$< f, g >:= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)dx, \quad \|f\|_{L_w^2} := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx},$$

est un espace de Hilbert.

Exercice 3 : Existence, unicité, récurrence, racines... Démontrer que pour tout entier n, il existe un unique polynôme P_n, de degré n, de coefficient dominant égal à 1 et orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (au sens de $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$).
Montrer que P_n n racines réelles deux à deux distinctes sur $]a, b[$
Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe a_n, b_n, c_n tels que :

$$XP_n = a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1}$$

Montrer qu'entre deux racines de P_{n+1} il y'a exactement une racine de P_n.

Exercice 4 : Cadre hilbertien
Soit $f \in L_w^2((a, b), \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimer le pma de f en fonction des $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Exemples classiques :
Polynômes de Legendre : $(a, b) = (-1, 1)$, $w \equiv 1$,

Polynômes de Chebyshev : $(a, b) = (-1, 1)$, $w(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$,
Polynômes de Hermite : $(a, b) = \mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x^2}$,
Polynômes de Laguerre : $(a, b) = (0, +\infty)$, $w(x) = e^{-x}$.
Les polynômes orthogonaux classiques ont une **formule explicite** et sont des **solutions particulières d'EDO** du 2nd ordre. [ref : Crouzeix Mignot exercices corrigés].

Exercice 5 : Formule d'Olinde Rodrigues, Equa diff
Démontrer que P_n est proportionnel à :

$$P_n(t) = \frac{1}{w(t)} \left[w(t) T(t)^n \right]^{(n)},$$

avec

$$T(t) = \begin{cases} 1 & \text{Pour Hermite} \\ t & \text{Pour Laguerre} \\ (t-a)(b-t) & \text{Pour les autres} \end{cases} \tag{1}$$

en déduire que P_n vérifie une équation différentielle linéaire homogène et de degré 2.

3 Les polynômes orthogonaux : bases hilbertiennes ?

Exercice 9 : Bases Hilbertiennes ?
1) Montrer que, si (a, b) est borné et si w est continue et > 0 sur $]a, b[$ alors $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de L^2_w. *(exemples : Legendre, Chebyshev)*
2) Quand (a, b) n'est pas borné, il peut arriver que $\mathbb{C}[X]$ ne soit pas dense dans L^2_w, donc $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne forme pas une base hilbertienne de L^2_w.
Montrer que, pour $(a, b) = (0, +\infty)$ et $w(x) := x^{-\ln(x)}$ la fonction $f(x) := sin(2\pi \ln(x))$ appartient à L^2_w et est orthogonale à $\mathbb{C}[X]$.
3) Le but de cette question est de monter que, s'il existe $C, \alpha > 0$ tels que, pour tout $t \in (a, b)$, $w(t) \leqslant Ce^{-\alpha|t|}$, alors $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de L^2_w. *(exemples : Laguerre, Hermite)*
3.a) Soit $f \in L^2_w$ orthogonale à $\mathbb{C}[X]$. On prolonge f et w par zéro hors de (a, b). Montrer que l'expression $F(z) := \int_{\mathbb{R}} f(t)w(t)e^{-zt}dt$ définit une fonction holomorphe sur

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C}; |\Re(z)| < \alpha/2\}.$$

3.b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(0) = 0$. Conclure.

Application : résolution d'une équation de Schrödinger 1D.
Une particule quantique dans un espace de dimension 1 est modélisée par une fonction d'onde

$$\begin{array}{cccccc} \psi : & \mathbb{R} & \times & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & (t & , & q) & \mapsto & \psi(t, q). \end{array}$$

L'interprétation physique de $|\psi(t, q)|^2$ est la probabilité de trouver le particule à la position q à l'instant t. Quand la particule se trouve dans un potentiel $V(q)$, la fonction d'onde résout l'équation de Schrödinger :

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,q) = -\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}(t,q) + V(q)\psi(t,q). \tag{2}$$

Les états propres du système sont les solutions de la forme

$$\psi_n(t,q) = \varphi_n(q)e^{-iE_nt}$$

où φ_n résout

$$-\varphi_n''(q) + V(q)\varphi_n(q) = E_n\varphi_n(q).$$

Pour $n = 1$, on parle d'état fondamental. Pour $n > 1$, on parle d'état excité. Les polynômes de Hermite permettent d'écrire explicitement les états propres de l'oscillateur harmonique (ie $V(q) = q^2$) :

$$\varphi_n(q) = G_n(q) \text{ et } E_n = 2n + 1.$$

Comme les (G_n) forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on en déduit la solution explicite de (2) de condition initiale $\psi(0) = \psi_0$

$$\psi(t) := \sum_{n=0}^{\infty} < \psi_0, G_n > e^{-iE_nt}.$$